Der kippende Besenstiel

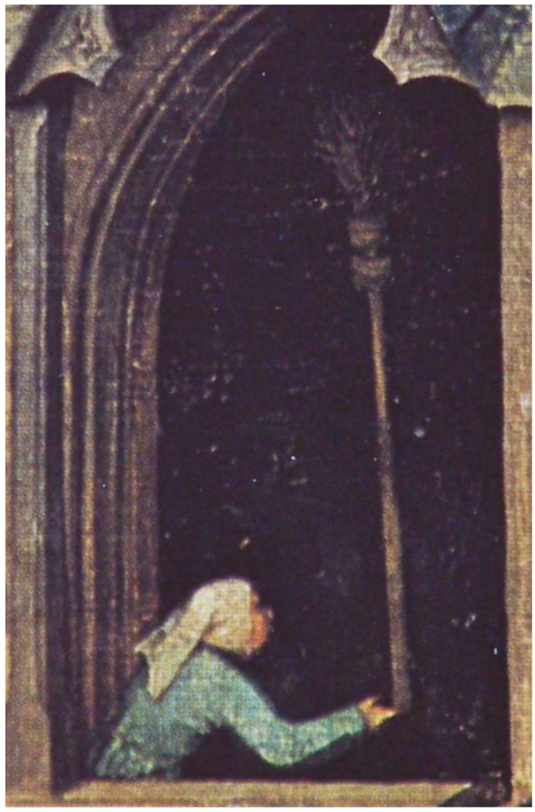
Ziele

Trägheitsmomente, Drehmomente. In diesem Versuch sollen Sie auch den Umgang mit Messunsicherheiten üben.

Kinderspiele

Bild 1 rechts zeigt ein Detail aus dem Gemälde „Kinderspiele" des niederländischen Renaissance-Malers Pieter Bruegel.

Ein Mädchen balanciert einen Besen auf dem rechten Zeigefinger. Sicherlich haben Sie das auch schon einmal ausprobiert und dabei vielleicht festgestellt, dass je länger der Stab ist, den Sie auf diese Weise jonglieren wollen, desto einfacher ist es. Einen kurzen Bleistift zu jonglieren setzt bereits viel Geschick voraus.



1 Balancieren mit dem Besenstiel (Detail aus „Kinderspiele", Pieter Bruegel 1560)

Zur Physik der Besenjonglage

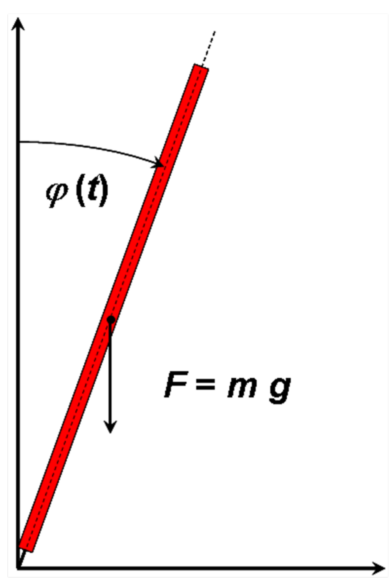
Abb.2 zeigt den zu untersuchenden Aufbau: Ein Stab der Länge l und Gesamtmasse m wird mehr oder weniger aufrecht gestellt und fallen gelassen. Eure Aufgabe besteht jetzt darin, die Fallbewegung zu untersuchen:

- Welchen Einfluss haben Länge l, Masse m und Anfangswinkel φ_0 auf den zeitlichen Ablauf der Kippbewegung?
- Wie lässt sich der zeitliche Verlauf der Kippbewegung theoretisch beschreiben?
- Welche Erkenntnisse ergeben sich daraus für die Jonglier-Übung?

Vorüberlegungen

Beschreiben Sie die Kippbewegung mithilfe physikalischer Begriffe.

Begründen Sie: Vernachlässigt man die Luftreibung, so hängt bei gleicher Stablänge die Kippzeit T nicht von der Stabmasse m ab.



2 Kippbewegung eines starren Stabes

Alltägliche Erfahrung: Je kleiner der Anfangswinkel ist, desto größer ist die Kippzeit T.

Welchen Einfluss hat die Stablänge?

Welche Schlussfolgerungen ergeben sich aus diesen Experimenten für das Jonglieren? Wie sollte der Stab beschaffen sein, damit das Jonglieren möglichst leicht gelingt?

Hinweise zum Experimentieren

1. Damit der Stab nicht auf dem Boden rutscht, sollte er mit einer Nagelspitze auf dem Boden stehen. Vorsicht, nicht den Boden zerkratzen! Gut geeignet ist ein Textilbodenbelag.

2. Achten Sie beim Loslassen darauf, dass der Stab keinen Anschubstoß bekommt! Auch das ist nicht einfach.

3. Die „Schrecksekunde“ hat es in sich. Sie müsst für die Zeitmessungen wissen, wie lang Ihre Reaktionszeiten sind. Diese addieren sich nämlich immer zu den manuellen Zeitmessungen. Mit der akustischen Stoppuhr geht es einfacher (s. u.).

4. Bei Stablängen unter einem Meter Länge werden die Messzeiten sehr kurz. Arbeiten also mit möglichst langen Stäben.

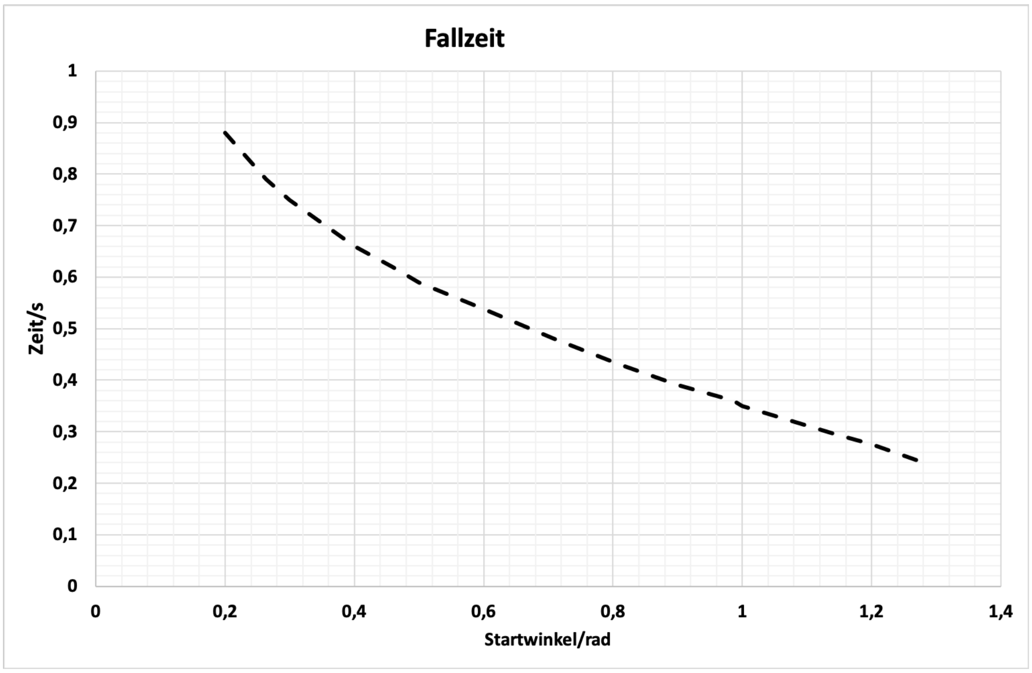
5. Für die Messungen des Ablaufs der Kippbewegung im 3. Aufgabenteil eignet sich die akustische Stoppuhr der Handy-App phyphox (kostenlos zum download bei phyphox.org).

Die Kippzeit

Der Anfangswinkel φ_0, die Stablänge l und der Ortsfaktor g bestimmen die Kippzeit. Je kleiner der Anfangswinkel φ_0 ist, desto größer ist T. Berechnet man nach Abb. 2 das Drehmoment für eine Drehung um den Aufstellpunkt, erhält man für die Winkelbeschleunigung:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\tau^2}; \ \tau = \sqrt{\frac{2\cdot l}{3\cdot g}}. \qquad (1)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung führt auf numerisch zu lösende *Elliptische Integrale*. Es existiert also keine einfache analytische Lösung für den fallenden Stab.



3 Theoretischer Verlauf: Fallzeit eines kippenden Stabes (l = 1.45 m, entsprechend τ = 0.314 s); nummerische Lösung von Gl. (1) mit einem Zeitschritt Δt = 10 ms.

Aufgabe: Numerische Lösung

(1) Entwickeln Sie ein Computerprogramm für eine numerische Lösung von Gl. (1) nach dem unten skizzierten Zeitschrittverfahren. Verifizieren Sie Ihr Programm in dem Sie die Ausgabe mit der Abb. (3) vergleichen, wählen Sie eine Stablänge von $l = 1.45$ m und einen Startwinkel $\varphi_0 = 0{,}25$ rad. Die Software/Programmiersprache dazu ist Ihnen überlassen. Abb. 3 zeigt eine nummerische Lösung mittels Zeitschrittverfahrens: Fallzeit eines 1,45-m-Stabes für unterschiedliche Anfangswinkel. Genutzt wurde ein Tabellenkalkulationsprogramm (hier Excel).

Die algorithmische Idee hinter dem Zeitschrittverfahren.

Erste Iteration: $\varphi_0 = \varphi(t = 0) \rightarrow$
$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{\sin(\varphi_0)}{\tau^2} \rightarrow \dot{\varphi}(\Delta t) = \dot{\varphi}(0) + \Delta t \ddot{\varphi}(0) \rightarrow \varphi(\Delta t) = \varphi_0 + \Delta t \dot{\varphi}(\Delta t)$$

Weitere Iterationen:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{\sin(\varphi(t))}{\tau^2} \rightarrow \dot{\varphi}(\mathrm{t} + \Delta t) = \dot{\varphi}(t) + \Delta t \ddot{\varphi}(\mathrm{t}) \rightarrow \varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \Delta t \dot{\varphi}(t + \Delta t) \rightarrow \ldots$$

Eckpunkte:

- Erläutern Sie das Verfahren; welche Idee steckt dahinter?
- Variieren Sie die Länge der Zeitschritte und beschreiben Sie den Einfluss auf die simulierte Fallzeit.
- Es gibt einen Endwinkel bei dem das Verfahren endet. Welcher ist das?

(2) Zeigen Sie, dass ein Massepunkt der Stabspitze mit einer größeren Beschleunigung zu Erde fällt, als eine frei fallende Punktmasse.

Messungen

Der Stab kippt schnell. Deshalb ist es nicht leicht, die Kippbewegung zu vermessen. Dennoch ist genau dies das Ziel dieses Versuchsteils. Messen Sie die Fallzeit T als Funktion des Startwinkel φ_0. Als Stoppuhr eignet sich zum Beispiel die akustische Stoppuhr von phyphox (https://phyphox.org/) gut. Messen Sie T für unterschiedliche Startwinkel φ_0 jeweils 5 mal. Bestimmen Sie den Standardfehler der Messung. Führen Sie die Messung für zwei verschiedene Stablängen durch.

Messunsicherheiten

- Für eine Abschätzung der Messunsicherheiten der Messung beantworten Sie folgende Frage: Wie groß müsste der mittlere relative Standardfehler der Messung sein, dass jeder ihrer Messwerte mit der statistischen Messunsicherheit erklärt werden kann?
- Finden Sie Hinweise auf systematische Fehler, z. B. Schallreflexionen, die die akustische Stoppuhr irritieren können. Laufzeitfehler durch die endliche Schallgeschwindigkeit ($c \approx 300$ m/s), Reaktionszeitfehler durch Sie?

Aufgaben

- Tragen Sie die gemessenen Fallzeiten T gegen den jeweiligen Startwinkel φ_0 auf.
- Stellen Sie die nummerischen Lösungen den gemessenen Zeiten im gleichen Diagramm gegenüber.
- Vergleichen Sie Ihre Messungen mit den numerischen Lösungen für die Parameter der verwendeten Stäbe. Konsistenzbetrachtung.
- Untersuchen Sie den Einfluss der Luftreibung auf die Fallzeit T (Aufbau, Messung, Auswertung).