

Angaben zum Experiment	
Name: _____	<div style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding: 10px 0;"> Stempel/ Tutor-Unterschrift / Punkte </div>
Gruppennummer: _____	
Versuchsleiter: _____	
Datum des Versuchs: _____	
Datum der Abgabe: _____	

Allgemeines	Ja	Nein	n.a.
• Abgabe des Berichts erfolgte pünktlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Äußere Form des Berichts ist angemessen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messdaten liegen dem Bericht bei	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Jede gedruckte Seite enthält Namen und Gruppennummer	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Es war keine Nachbesserung erforderlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Strukturierung und Dokumentation	Ja	Nein	n.a.
• Der Bericht ist für sich stehend verständlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Rechenwege zur Ermittlung des Ergebnisses sind nachvollziehbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Unsicherheiten wurden richtig ermittelt (Fehlerfortpflanzung)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Alle quantitativen Ergebnisse enthalten Angaben zur Messunsicherheit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten und Ergebnisse werden diskutiert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Graphische Darstellung	Ja	Nein	n.a.
• Bildunterschriften sind aussagekräftig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Achsen sind vollständig bezeichnet und sinnvoll skaliert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten sind mit Fehlerbalken dargestellt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei Fit-Analysen sind alle relevanten Parameter angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei übernommenen Bildern ist die Quelle angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Anmerkungen

Homelab: Kippender Besenstiel

Arne Dykierrek, Malte Stoepper

8. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Vorüberlegungen	3
3	Versuchsaufbau	4
4	Messung	4
5	Auswertung	5
5.1	Stab der Länge $2,02 \pm 0,002m$	6
5.2	Stab der Länge $1,413 \pm 0,002m$	7
5.3	Stab der Länge $2,02 \pm 0,002m$ mit Pappe	7
6	Betrachtung der Unsicherheiten	8
6.1	statistische Messunsicherheit	8
6.2	systematische Unsicherheit	9
6.3	gesamte Unsicherheit	9
7	Zusammenfassung	9

1 Einleitung

Im Homelab: Kippender Besenstiel geht es um die Untersuchung der Kippbewegung eines Zylinders aufgrund der Erdgravitation. Dabei soll die Länge l des Zylinders deutlich größer sein, als sein Radius a , was beispielsweise durch einen Besenstiel realisiert werden kann. Ebenfalls soll der Umgang mit numerischen Lösungen von Differentialgleichungen geübt werden und die Lösungen dieser mit unseren Messungen verglichen werden.



2 Vorüberlegungen

Beobachtet man die Kippbewegung des Stabes, so erkennt man, dass diese durch die Beschleunigung des Winkels zum senkrecht zum Boden einfallenden Lot beschrieben werden kann. Gehen wir also Schritt für Schritt vor um klar zu machen, wie es zu dieser Bewegung kommt.

Hält man den Stab in einem bestimmten Winkel ϕ_0 zum einfallenden Lot, so greift die Gewichtskraft des Stabes an seinem Schwerpunkt an, wodurch ein Drehmoment entsteht, dem man durch festhalten genau entgegen wirkt und der Stab in Ruhe verweilt. Dieses lässt sich durch

$$M = F \cdot R \cdot \sin(\phi_0)$$



berechnen, wobei R den Abstand vom Ursprung zum Schwerpunkt beschreibt. Lässt man den Stab nun los, sorgt dieses Drehmoment also für eine Winkelbeschleunigung des Stabes. Durch die beschleunigte Bewegung kommt es allerdings auch in jedem Punkt zu einem anderen Drehmoment, wodurch das Drehmoment stetig größer wird und der Stab somit immer schneller beschleunigt wird.

Betrachtung der sich ergebenden Differentialgleichung bei Vernachlässigung der Luftreibung:

$$M = J\ddot{\phi} = F \cdot R \cdot \sin(\phi)$$

Geht man außerdem von einer homogenen Massenverteilung aus, so liegt der Schwerpunkt bei $\frac{l}{2}$, wobei l die Länge des Stabes ist und das Trägheitsmoment ergibt sich bei der Annahme, dass die Länge des Stabes deutlich größer als sein Radius a ist, mit Hilfe des steinerschen Satzes zu $J = \frac{1}{3}ml^2$. Mit $F = mg$ ergibt sich dann durch umstellen:

$$\ddot{\phi} = \frac{3g}{2l} \cdot \sin(\phi)$$



Dies zeigt, dass die Beschleunigung und somit auch die Fallzeit T des Stabes bei Vernachlässigung der Luftreibung unabhängig von der Masse des Stabes sein wird. Mit $\tau = \sqrt{\frac{2l}{3g}}$ wird die DGL zu:

$$\ddot{\phi} = \frac{\sin(\phi)}{\tau^2}$$

Aus der Differentialgleichung kann man ebenfalls ablesen, dass bei größeren Stablängen die Beschleunigung des Winkels kleiner ist, was zu einer längeren Fallzeit führt. Dies liegt daran, dass das Trägheitsmoment ein Maß für die Trägheit eines Körpers bei Rotation um eine bestimmte Achse ist und dies für einen Stab mit $l \gg a$ proportional zu l^2 . Dies führt dazu, dass ein längerer Stab bei gleicher Krafteinwirkung schwieriger zu beschleunigen ist und somit langsamer fällt. Dies ist auch der Grund, warum sich längere Stäbe leichter balancieren lassen, als kurze.

Betrachtet man doch noch einmal die Luftreibung, so erkennt man, dass diese die Kippbewegung bremst. Für diese Reibungskraft gilt:



$$M_R = -\beta\dot{\phi},$$

mit Reibungskoeffizient β . Dies kann beispielsweise durch eine Art Segel realisiert werden. Wenn das Objekt am oberen Ende befestigt ist, folgt direkt, dass das durch die Reibung verursachte Drehmoment größer ist, wenn dies am Ende angreift. Dieses Moment muss also in der DGL auch berücksichtigt werden, was die Massenunabhängigkeit des Systems zunichte macht:

$$\ddot{\phi} = \frac{\sin(\phi)}{\tau^2} - \frac{\beta}{J}\dot{\phi}$$

Der Reibungsterm des Luftwiderstand skaliert also mit $\frac{1}{m}$, was dazu führt, dass leichtere Stäbe eine längere Fallzeit haben als schwere Stäbe bei gleicher Form.

Für das Balancieren eines Stabes bedeutet das konkret, dass es vorteilhaft ist, einen langen, leichten Stab zu nehmen. Zusätzlich kann man ein großflächiges Objekt anbringen, welches die Aerodynamik des Stabs verändert und somit die Fallzeit noch mehr erhöht, also das Balancieren erleichtert. Dieses Objekt muss aber im Vergleich zum Stab sehr leicht sein, was bei einem bereits leichten Stab sehr schwer um zu setzen ist.



3 Versuchsaufbau



Ein Stab der Länge l wird mit Hilfe eines Fadens der Länge f , welcher an der Wand auf der Höhe h fest gehalten wird und am Punkt s des Stabes befestigt ist, in einem konstanten Anfangswinkel ϕ_0 zu der Wand gehalten. Dieser Winkel kann über

$$\phi_0 = \arcsin \frac{f}{s}$$

bei Variation von h und über

$$\phi_0 = \arctan \frac{f}{h}$$

bei Variation von s berechnet werden. Aufgrund der verschiedenen Experimentierbedingungen wurden beide Methoden benutzt. Die genauen Experimentierbedingungen und Durchführung sind im AP-Doku-Wiki beschrieben.



4 Messung

Es werden für jeden Stab jeweils für acht verschiedene Startwinkel ϕ_0 die Fallzeit T gemessen. Dabei werden pro Winkel fünf Messungen durchgeführt und diese dann gemittelt. Zusätzlich wurden mithilfe eines im Doku-Wiki dokumentierten Verfahrens numerische Lösungen für die Differentialgleichung gesucht:

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^5 T_i}{5}$$



Folgende Zeiten wurden ermittelt:



Anfangswinkel ϕ_0 in Grad	Fallzeit T_m in s	numerische Fallzeit in s
11,64	1,0346	1,03
22,39	0,8222	0,78
31,71	0,6706	0,65
39,48	0,5624	0,57
48,56	0,4958	0,48
55,26	0,4574	0,43
58,75	0,4052	0,40
60,84	0,3812	0,38

Tab. 1: Gemittelte Fallzeiten und numerische Lösungen für verschiedene ϕ_0 bei $l=2,02\pm 0,002\text{m}$

Anfangswinkel ϕ_0 in Grad	Fallzeit T_m in s	numerische Fallzeit in s
5,91	1,062	1,07
13,55	0,8144	0,81
25,18	0,6316	0,62
33,94	0,5364	0,52
40,01	0,4992	0,47
47,57	0,4292	0,41
55,81	0,3186	0,35
64,48	0,3002	0,29

Tab. 2: Gemittelte Fallzeiten und numerische Lösungen für verschiedene ϕ_0 bei $l=1,413\pm 0,002\text{m}$

Zusätzlich wurde noch eine weitere Messung durchgeführt, bei der die Luftreibung des Stabes mithilfe einer angeklebten Pappe vergrößert wurde.

Anfangswinkel ϕ_0 in Grad	Fallzeit T in s
39,48	0,7858
31,71	0,8972
22,39	1,0416
11,64	1,3236

Tab. 3: Gemittelte Fallzeiten für verschiedene ϕ_0 bei $l=2,02\pm 0,002\text{m}$ mit angeklebter Pappe

5 Auswertung

Im folgenden sollen nun die gemittelten Fallzeiten mit den numerischen Lösungen der Differentialgleichung verglichen werden. Dafür wird jeweils die Fallzeit T gegen den Startwinkel ϕ_0 aufgetragen.



5.1 Stab der Länge $2,02 \pm 0,002m$

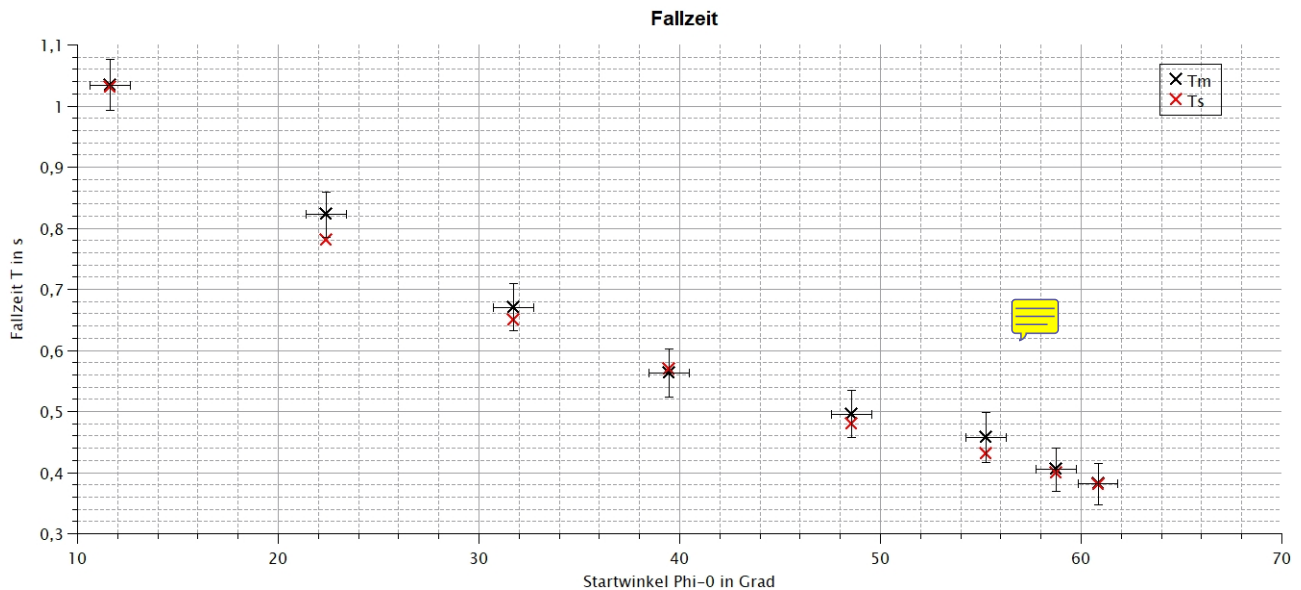


Abb. 1: Gemittelte Fallzeiten und numerische Lösungen für verschiedene ϕ_0 bei $l=2,02\pm 0,002m$

Das Diagramm zeigt den Vergleich der gemittelten Fallzeiten T_m mit den numerischen Lösungen T_s der Differentialgleichung. Man erkennt, dass im Rahmen der statistischen und systematischen Messunsicherheiten, welche in einem eigenen Abschnitt betrachtet werden, die gemessenen Daten fast überall mit der numerischen Lösung übereinstimmen. Lediglich der zweite gemittelte Wert für die Fallzeit schließt den Wert der numerischen Lösung nicht in sein Fehlerintervall mit ein.

Dies könnte an daran liegen, dass das Intervall des Standardfehlers um den Mittelwert nur zu ca.70% den wahren Mittelwert enthält, der auftretende Fehler also zufällig ist. Der Fehler wurde allerdings nicht durch einen oder zwei Messwerte verursacht. Ein Vergleich der Messdaten zeigt, dass alle Daten dieser Reihe leicht über dem der numerischen Lösung liegen. Wahrscheinlicher ist es daher, dass die Messung der Fallzeit ungenau durchgeführt wurde, bzw. andere Faktoren, wie ein unaufmerksames Messen der Fadenlänge und ein sich somit anders ergebener Startwinkel diese Abweichung verursachen. Die relative Abweichung vom numerischen Wert beträgt dabei:

$$\frac{T_m - T_s}{T_s} = \frac{0,8222 - 0,78}{0,78} = 5,41\%$$

Aufgrund der Annahme, dass es sich um ein reibungsfreies System, eines perfekten Zylinders handelt sind die numerischen Lösungen der Differentialgleichung natürlich auch nicht exakt, sondern stellen nur die Werte eines idealen Systems dar, welches zusätzlich durch die gewählten Zeitschritte nur auf 0,01s genau bestimmt ist. Dies lässt sich auch darin erkennen, dass die Messwerte fast alle größer sind, als die numerischen Lösungen sind, was auf die Luftreibung des realen Stabes zurückgeführt werden könnte.

Daher lässt sich sagen, dass die aufgenommenen Messwerte die numerische Lösung gut annähern und den Verlauf der Fallzeit in Abhängigkeit des Startwinkels gut darstellen.



5.2 Stab der Länge $1,413 \pm 0,002m$

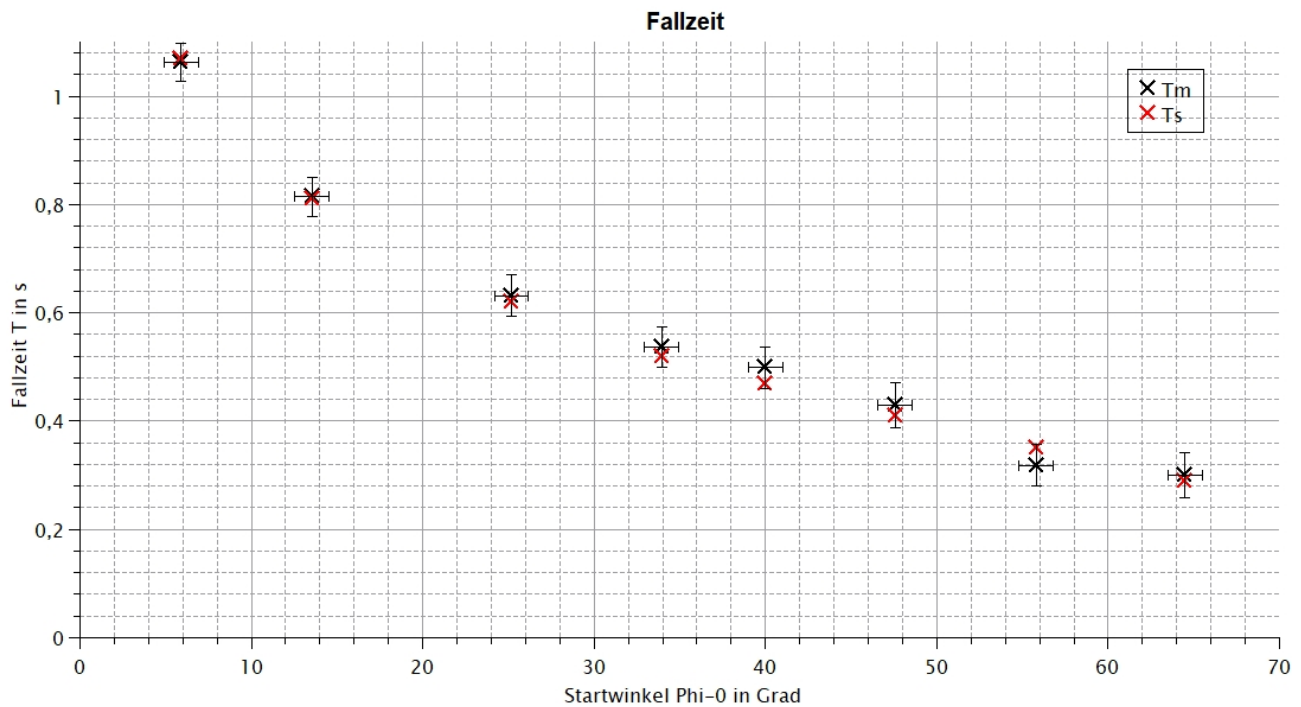


Abb. 2: Gemittelte Fallzeiten und numerische Lösungen für verschiedene ϕ_0 bei $l=1,413 \pm 0,002m$

Es zeigt sich, dass sich ein ähnliches Bild, wie für den anderen Stab ergibt. Hier liegen sogar alle numerischen Lösungen in den Fehlerintervallen der gemittelten Fallzeiten. Allerdings fällt auch hier auf, dass die gemessenen Fallzeiten in den meisten Fällen größer sind, als die numerischen Lösungen, wobei die Differenz nicht so signifikant wie beim anderen Stab ist. Dies bestätigt die Theorie mit der Luftreibung, da der andere Stab sowohl länger, als auch breiter ist, wodurch die Luftreibung größer ist und sich eine größere Differenz zum numerischen Wert ergibt, der die Luftreibung vernachlässigt.

Zusätzlich lässt sich, wie erwartet der Effekt erkennen, dass ein längerer Stab langsamer fällt, als ein kürzerer.

5.3 Stab der Länge $2,02 \pm 0,002m$ mit Pappe

Im folgenden soll noch der Einfluss der Luftreibung untersucht werden. Dafür wurden die Messwerte, ohne Luftreibung und die mit Luftreibung zum Vergleich in einem Diagramm gegenüber gestellt.

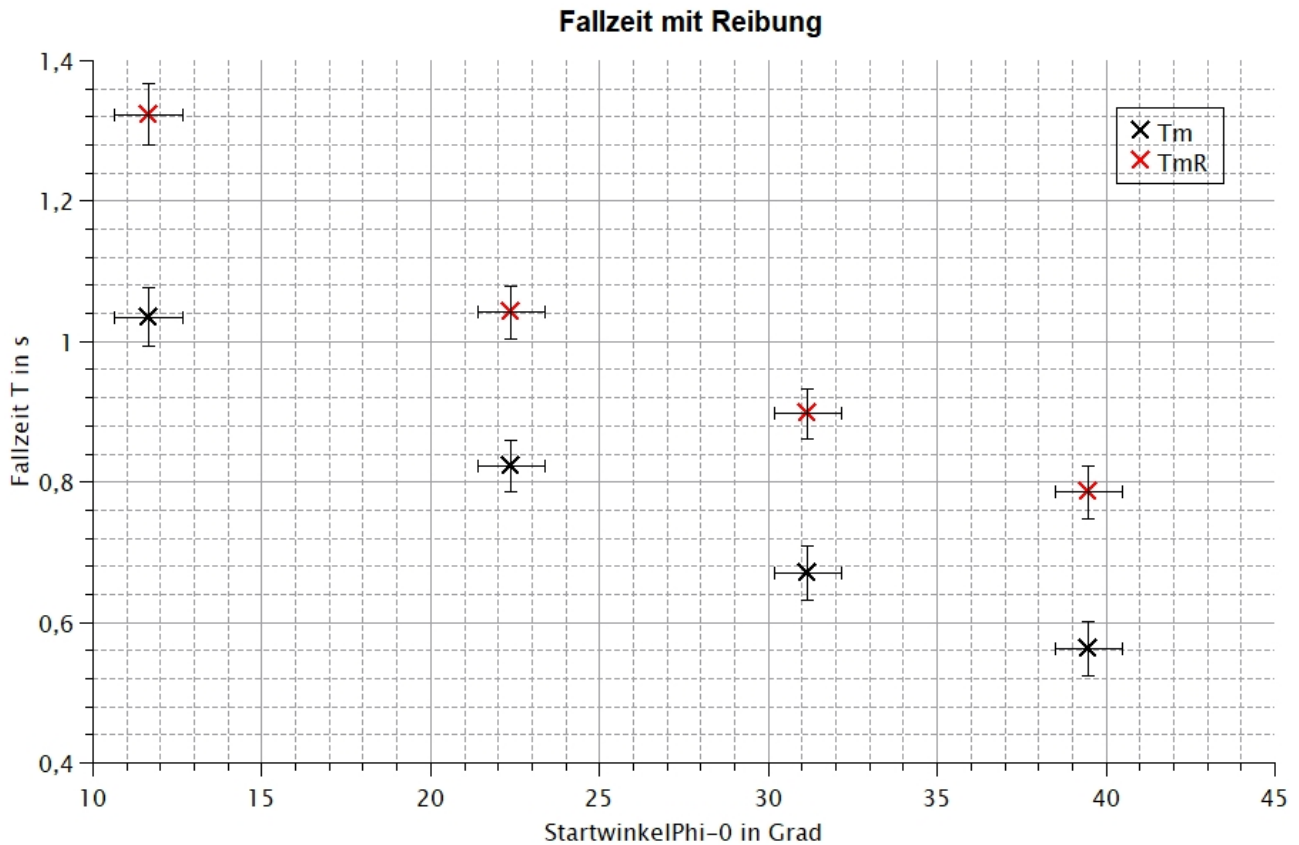


Abb. 3: Gemittelte Fallzeiten mit und ohne zusätzlichen Luftwiderstand für verschiedene ϕ_0 bei $l=2,02\pm 0,002m$

Zu erkennen ist, dass die mittlere Fallzeit des Stabs durch die angebrachte Pappe und den somit erhöhten Luftwiderstand für alle Winkel deutlich größer ist, was die in den Vorüberlegungen aufgestellte Theorie bestätigt. Außerdem gibt dieser Versuch den vorherigen Messungen eine größere Aussagekraft, da zu erkennen ist, dass erst nach Manipulation der Aerodynamik des Stabs, signifikant längere Fallzeiten als bei Vernachlässigung der Luftreibung entstehen und somit die Luftreibung zuvor so gut wie vernachlässigt werden konnte.

6 Betrachtung der Unsicherheiten

6.1 statistische Messunsicherheit

Damit alle Messergebnisse mithilfe der statistischen Messunsicherheit begründet werden können, muss der relative Standardfehler der Messung 14,88% betragen. (Tabellen im AP-Doku-Wiki) Dies ist zwar ein Wert, mit dem die Messung publikationsfähig wäre, allerdings ist es nicht besonders klug alle Fehler auf die statistische Messunsicherheit zurück zu führen, da wir bereits wissen, dass auch systematische Fehler beim Messen auftreten, die die Messung beeinflussen. Daher soll der mit Hilfe von QTI-Plot ausgegebene Standardfehler als statistische Unsicherheit genutzt und im folgenden noch systematische Fehler betrachtet werden.



6.2 systematische Unsicherheit

1. Unsicherheit durch Laufzeitunterschiede der Schallwellen

$$u(T) = 0,0003s$$

2. Unsicherheit durch Koordination bzw. Reaktion

Des Weiteren kommt auch noch eine Unsicherheit durch die eigene Reaktionszeit bzw. Koordination zustande, die sich durch die im AP-Doku-Wiki beschriebene Methode auf

$$u(T) = 0,03s$$

beläuft.

3. Unsicherheit des Startwinkels

$$u(\phi_0) = 1^\circ$$



6.3 gesamte Unsicherheit

Die Unsicherheit für den Startwinkel ergibt sich damit zu

$$u(\phi_0) = 1^\circ.$$



In die Unsicherheit der gemittelten Periodendauer spielt nun einmal der jeweilige Standardfehler und zusätzlich die systematischen Fehler rein, die für alle Messungen gleich sind und addiert werden.

Startwinkel ϕ_0 in Grad	u(T) in s	Winkel ϕ_0 in Grad	u(T) in s
11,64	0,04172190877218	5,91	0,03550576603393
22,39	0,03672961896227	13,55	0,03718186021363
31,71	0,03912383136738	25,18	0,03814601809837
39,48	0,03977336652436	33,94	0,03758422954059
48,56	0,0387640415878	40,01	0,03833367910736
55,26	0,04177431915191	47,57	0,0424466044638
58,75	0,03594269439187	55,81	0,03872970936628
60,84	0,03379857113691	64,48	0,04259796731171



Tab. 4: Unsicherheiten der Fallzeit für $l = 2,02 \pm 0,002m$ Tab. 5: Unsicherheiten der Fallzeit für $l = 1,413 \pm 0,002m$

7 Zusammenfassung

Es zeigt sich, dass dieses vermeintlich einfache und intuitive Experiment in der Analyse doch komplexer Natur ist, besonders, wenn Luftreibung mit betrachtet wird. Trotzdem konnten mit den zu Hause durchgeführten Experimenten aussagekräftige Ergebnisse erzielt werden: Mit der numerischen Lösung lässt sich die Fallzeit eines beliebig langen Stabes sehr gut bestimmen, wobei die Luftreibung des Stabes vernachlässigbar klein ist. Ebenfalls hat sich die Intuition,



dass ein langer Stab langsamer fällt als ein kürzerer sowohl im Experiment, als auch in der numerischen Lösung der Differentialgleichung wiedergespiegelt, was die Lösung für die anfängliche Fragestellung, wann ein Stab besonders gut auf einer Fingerspitze zu balancieren ist gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Fallzeit des Stabes groß wird, der Stab also lang ist, da man so besser auf kleine Bewegungen des Stabes reagieren kann.