



Angaben zum Experiment	
Name: _____	<div style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 40px; margin: 0 auto; width: 80%;"></div> Stempel/ Tutor-Unterschrift / Punkte
Gruppennummer: _____	
Versuchsleiter: _____	
Datum des Versuchs: _____	
Datum der Abgabe: _____	

Allgemeines	Ja	Nein	n.a.
• Abgabe des Berichts erfolgte pünktlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Äußere Form des Berichts ist angemessen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messdaten liegen dem Bericht bei	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Jede gedruckte Seite enthält Namen und Gruppennummer	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Es war keine Nachbesserung erforderlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Strukturierung und Dokumentation	Ja	Nein	n.a.
• Der Bericht ist für sich stehend verständlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Rechenwege zur Ermittlung des Ergebnisses sind nachvollziehbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Unsicherheiten wurden richtig ermittelt (Fehlerfortpflanzung)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Alle quantitativen Ergebnisse enthalten Angaben zur Messunsicherheit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten und Ergebnisse werden diskutiert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Graphische Darstellung	Ja	Nein	n.a.
• Bildunterschriften sind aussagekräftig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Achsen sind vollständig bezeichnet und sinnvoll skaliert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten sind mit Fehlerbalken dargestellt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei Fit-Analysen sind alle relevanten Parameter angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei übernommenen Bildern ist die Quelle angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Anmerkungen

Der kippende Besenstiel

Lara Lelakowski, Jonas Bliesener

8. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Herleitung der Bewegungsgleichung	3
3	Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung	4
4	Beschleunigung eines Massepunktes an der Stabspitze	5
5	Versuch - der kippende Besenstiel	5
6	Messunsicherheiten	6
7	Ergebnis	6
8	Versuch 2 - Einfluss der Lufttreibungsfläche auf die Fallzeit	7
9	Fazit	8
10	Anhang	9



1 Einleitung

In diesem Laborversuch wird die Bewegung eines kippenden Besenstiels untersucht. Der kippende Besenstiel lässt sich mit einem invertiertem Pendel vergleichen, welches bei kleinen Auslenkungen bereits den stabilen Zustand verlässt und zu kippen beginnt. Dieses Phänomen lässt sich bei der Besenjonglage, bzw. den Versuch einen langen Stab auf den Fingern zu jonglieren beobachten.

Wir untersuchen hierbei den Einfluss der Länge l , der Masse m und des Anfangswinkels ϕ_0 . Außerdem wird der zeitliche Verlauf der Kippbewegung untersucht und beschrieben. Hierraus sollen sich physikalische Erkenntnisse für die Besen-Jonglage ergeben.

2 Herleitung der Bewegungsgleichung

Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung des kippenden Besenstiels hergeleitet, um sich einen besseren Überblick über die einzelnen beteiligten Parameter zu ermöglichen. Hierbei wird die Luftreibung vernachlässigt. Ferner wird die Bewegung des Massenmittelpunkts betrachtet, also der Punkt $h = \frac{l}{2}$.

Der kippende Besenstiel (bzw. Stab) beschreibt eine Rotationsbewegung um einen festen Bodenbezugspunkt, die durch die Schwerkraft hervorgerufen wird. Für das Trägheitsmoment eines dünnen Stabs bei Rotation um eine Querachse durch ein Ende gilt: $I = \frac{1}{3}ml^2$. 

Für die Energie des Besenstiels bei einer Auslenkung von $\phi = 0$ gilt :

$$E_{Ges}(\phi = 0) = E_{pot}(\phi = 0) = mgh = mg\frac{l}{2}.$$

Bei einer Auslenkung um ϕ gilt:

$$E_{Ges}(\phi) = E_{Rot}(\phi) + E_{Pot}(\phi), \text{ wobei:}$$

$$E_{Rot}(\phi) = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 \quad \text{und} \quad E_{Pot}(\phi) = \frac{1}{2}mgl\cos(\phi).$$

$$\Rightarrow E_{Ges}(\phi) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mgl\cos(\phi)$$

Aus Energieerhaltung folgt:

$$0 = \frac{dE_{Ges}}{dt} = \frac{dE_{Rot}}{dt} + \frac{dE_{Pot}}{dt} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\phi}\ddot{\phi} - \frac{1}{2}mgl\dot{\phi}\sin(\phi)$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{3g}{2l}\sin(\phi) \quad \text{img alt="Yellow sticky note icon" data-bbox="622 762 652 782"/>$$

Somit ergibt sich als Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{\sin(\phi(t))}{\tau^2} \quad \text{mit } \tau = \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Die Bewegung des kippenden Stabs hängt also bei Vernachlässigen der Luftreibung nicht mehr von der Masse m ab.



3 Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist analytisch nicht möglich, denn sie führt auf numerisch zu lösende elliptische Integrale.

Die numerische Lösung lässt sich durch eine Iteration ermöglichen:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{\sin(\phi(t))}{\tau^2} \rightarrow \dot{\phi}(t + \Delta t) = \dot{\phi}(t) + \Delta t \ddot{\phi}(t) \rightarrow \phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \Delta t \dot{\phi}(t + \Delta t) \rightarrow \dots$$

Die Idee hinter dem Verfahren steckt darin, infinitesimal kleine Tangenten der ersten und zweiten Ableitung über die Zeitschritte zu integrieren. Der Punkt nach dem ersten Zeitschritt ist dabei der Ausgangspunkt für den nächsten Zeitschritt. So kann durch die zweite Ableitung auf die erste Ableitung und somit auf die Funktion $\phi(t)$ geschlossen werden. Für klein gewählte Zeitschritte kann somit hinreichend genau die Funktion bestimmt werden.

Wir führen diese Iteration mit Mathematica durch. Hierbei erweist sich ein Module als nützlich, in dem Anfangsauslenkung ϕ_0 , Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0$, die Zeitschritte Δt und die Länge des Stabes l als lokale Variable gespeichert werden, und anschließend die Iteration durch eine While-Schleife durchgeführt wird. Die While-Schleife führt die Iteration so lange durch, bis ein Wert $\phi(t) \geq \frac{\pi}{2}$ erreicht ist.

```
In[1]:= Iteration[startφ_, startdφ_, timestep_, length_] :=
Module[{φ0 = startφ, dφ0 = startdφ, delta = timestep, l = length},
[Modul
τ =  $\sqrt{\frac{2}{3} * \frac{l}{9.81}}$ ; time = 0;
While[φ0 ≤  $\frac{\pi}{2}$ ,
[solange
ddφ =  $\frac{\text{Sin}[\phi0]}{\tau^2}$ ;
dφ = dφ0 + delta * ddφ;
φ = φ0 + delta * dφ;
φ0 = φ;
dφ0 = dφ;
time += delta
];
time]
```

```
In[2]:= ListPlot[Table[{i, Iteration[i, 0, 0.01, 1.45]}, {i, 0.01, 1.57, 0.01}]]
[listenbezo... [Tabelle]
```

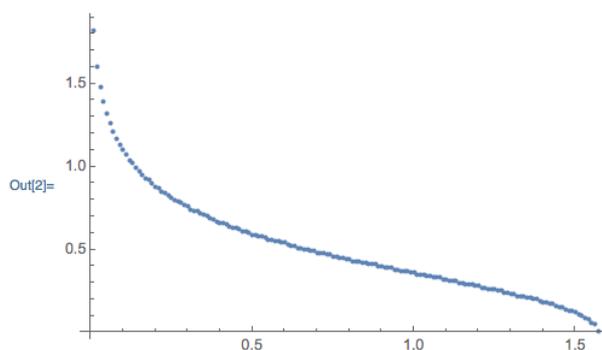


Abb. 1: Numerische Iteration der Fallzeit des Besens in Mathematica



Per ListPlot können die berechneten Werte der Iteration graphisch dargestellt werden. Wir wählen als Beispiel eine Stablänge von $l = 1.45\text{m}$ und einen Startwinkel von $\phi_0 = 0.25\text{rad}$. Dabei ist auf der Y-Achse die Fallzeit T und auf der X-Achse die Anfangsauslenkung ϕ_0 . Die Messwerte entsprechen den Werten aus dem Diagramm in dem gegebenen Material (R. Scholz, 2020, S.2).



4 Beschleunigung eines Massepunktes an der Stabspitze

Im Folgenden wollen wir die Beschleunigung einer frei fallenden Punktmasse mit dem eines Massepunktes an einer Stabspitze vergleichen.

Für eine frei fallende Masse unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung gilt: $a_{PM} = g$.

Für einen Massepunkt an der Stabspitze muss die Winkelbeschleunigung betrachtet werden:

$$a_{MP} = \ddot{\phi}(t) \cdot l \Rightarrow \ddot{\phi}(t) = \frac{\sin(\phi(t))}{\tau^2} \cdot l$$

Für die Beschleunigung beim Auftreffen auf die Erde folgt:

$$a_{MP} = \ddot{\phi}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot l = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\tau^2} \cdot l = \frac{3}{2}g \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}g$$

Ein Massepunkt am Ende einer Stabspitze fällt also mit einer größeren Beschleunigung zur Erde als ein frei fallender Massepunkt.



5 Versuch - der kippende Besenstiel

Aufbau:

Mit einem großen Geodreieck wurden in $2,5^\circ$ Abständen Linien auf ein Din A3 Blatt gezeichnet. Dieses A3 Papier wurde an eine plane senkrechte Oberfläche (Schrank) fixiert, wodurch die Anfangsauslenkung des Besenstiels in $2,5^\circ$ Abständen gemessen werden konnte. Der Besenstiel wurde auf einen flachen Teppich gestellt, wodurch er bei der Fallbewegung nicht (oder kaum) gerutscht ist. Die Länge des Besenstiels war hierbei variierbar, wodurch für $m = 350\text{g} = \text{const.}$ die Länge l variiert werden konnte. Hierbei wurde $l_1 = 106\text{cm}$ und $l_2 = 140,3\text{cm}$ gewählt.

Durchführung/Messung:

Der Stab wurde jeweils mit einem Anfangswinkel $2,5^\circ \leq \phi_0 \leq 45^\circ$ in $2,5^\circ$ -Schritten fallen gelassen und die Fallzeit $T_l(\phi_0)$ gemessen. Hierbei wurden für jeden Anfangswinkel ϕ_0 fünf Messdaten aufgenommen. Die Fallzeit wurde mithilfe der akustischen Stoppuhr der App *PhyPhox* gemessen. Gleichzeitig zum Fallenlassen des Stabes wurde "Los" gesagt, wodurch die akustische Stoppuhr aktiviert wurde. Durch das Knallen des aufprallenden Besens wurde die akustische Stoppuhr wieder gestoppt.



6 Messunsicherheiten

Winkelmessung: Für große Stablängen lässt sich der Winkel genauer bestimmen, da die Bogenmaßlänge für größere Radien zunimmt. Das Polarpapier haben wir allerdings durch Verlängern der Gradlinien eines Geodreiecks auf ein A3-Papier erstellt. Hierdurch ist sicherlich ein hoher Fehler entstanden. Wir schätzen die Ungenauigkeit auf $u(\phi_0) = 2^\circ$.

Aufbaubedingt: Durch den Aufbau ergibt sich eine weitere Messunsicherheit. Durch das Fallenlassen des Stabs aus der Hand ist die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_0 \neq 0$. Allerdings schätzen wir diese Messunsicherheit als gering ein.

Zeitmessung: Bei der Zeitmessung liegen zwei Faktoren für die systematische Unsicherheit vor. Einmal die Schrecksekunde beim Loslassen des Stabs $u(T_{Schreck}) = 0,065\text{s}$ und die Ungenauigkeit durch die endliche Schallgeschwindigkeit. Die Unsicherheit durch die Schallgeschwindigkeit $v = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich durch den Abstand des Aufprallpunkts zur Stoppuhr $s = 1\text{m} \Rightarrow u(T_{Schall}) = 2 \frac{s}{v} = 0,006\text{s}$. Reflektionen des Schalls an Wänden müssen wir dabei nicht betrachten, da die Stoppuhr so kalibriert wurde, dass sie mindestens 0,1s detektieren soll. Insgesamt ergibt sich also: $u(T_{Ges}) = 0,07\text{s}$.

Ferner liegen bei der Zeitmessung auch statistische Messunsicherheiten vor. Die statistische Messunsicherheit liegt in einem Bereich von $0,03 < \sigma_T < 0,15$.

Die Gesamtmessunsicherheit ergibt sich durch: $u(T) = \sqrt{u(T_{Ges})^2 + \sigma_T^2}$.

7 Ergebnis

Auftragen der Fallzeiten T für die jeweiligen Anfangsauslenkungen ϕ_0 ergibt:

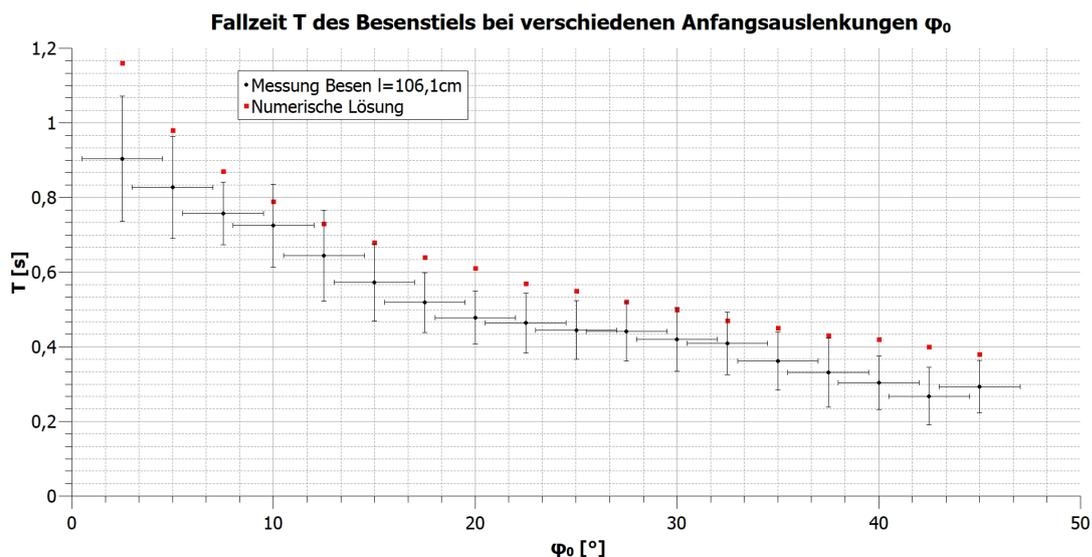


Abb. 2: Messung für den Besenstiel der Länge $l = 106,1\text{cm}$

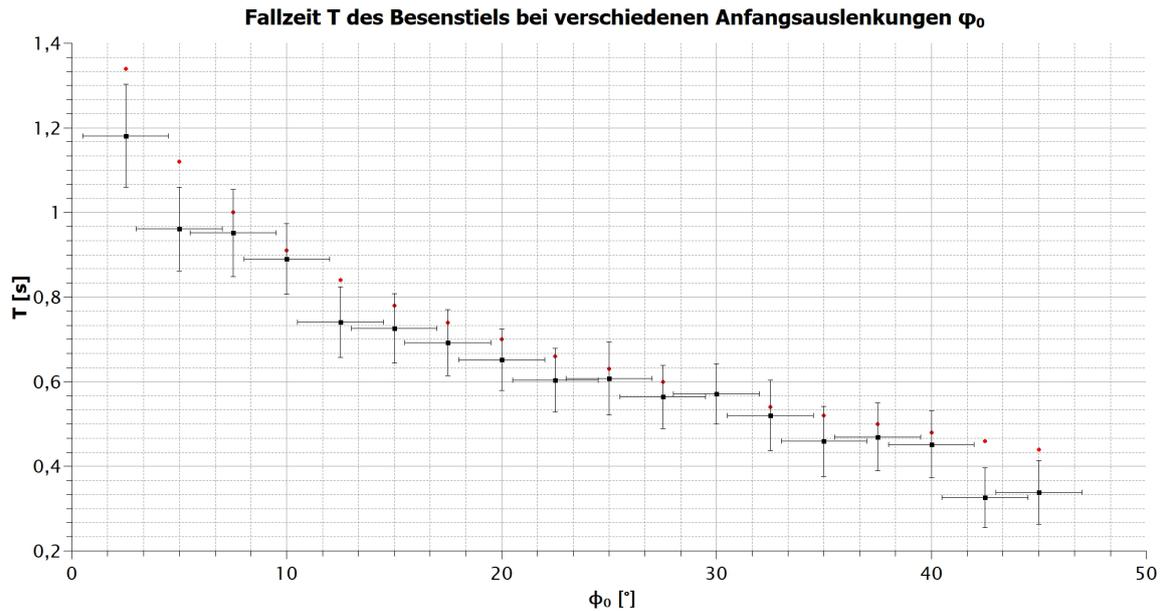


Abb. 3: Messung für den Besenstiel der Länge $l = 140,3\text{cm}$

Wie zu erkennen ist, beschreiben die Messwerte eine annähernd hyperbolische Funktion. Die Fallzeit T nimmt zuerst bei geringer Anfangsauslenkung ϕ_0 schnell ab und flacht bei größeren Anfangsauslenkungen ab. Anders als bei der numerischen Annäherung geht die Funktion nicht erst im Grenzfall $\phi_0 \rightarrow \infty$ gegen 0, sondern immer bei $\frac{\pi}{2}$. Zudem fällt auf, dass die Fallzeit des Besens trotz zusätzlicher Luftreibung geringer ist, als die numerisch bestimmte Fallzeit. Die Ursache hierfür könnten zum einen die nicht betrachtete Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(0)$ sein oder die nicht homogene Masse des Besenstiels. Durch eine nicht homogene Masse verschiebt sich der Massenschwerpunkt und das Trägheitsmoment ändert sich.



Im Bezug auf die Besen-Jonglage lässt sich erkennen, dass für jede gemessene Anfangsauslenkung die Fallzeit bei dem längeren Besenstiel größer ist, als bei dem kürzerem. Es empfiehlt also bei der Jonglage eines Besens einen längeren Stab zu verwenden.

8 Versuch 2 - Einfluss der Luftreibungsfläche auf die Fallzeit

Um die Fallzeit in Abhängigkeit der Luftreibungsfläche zu untersuchen, wurden an den Stab bei einer Länge von $l = 1,403\text{m}$ zwischen 0 und 4 DinA4 Blätter befestigt. Dabei wurde der Stab bei einem Startwinkel von $\phi_0 = 22,5^\circ$ erst fünf mal ohne einer weiteren Reibungsfläche und dann mit einer bis vier weiteren Reibungsflächen von je $A = 0,0625\text{m}^2$ fallen gelassen. Die gemessenen Werte lassen sich in der Tabelle im Anhang wiederfinden. Die Versuchsdurchführung und die Messunsicherheiten sind analog zu Versuch 1.

Graphisches Darstellen der erhaltenen Messwerte ergibt:

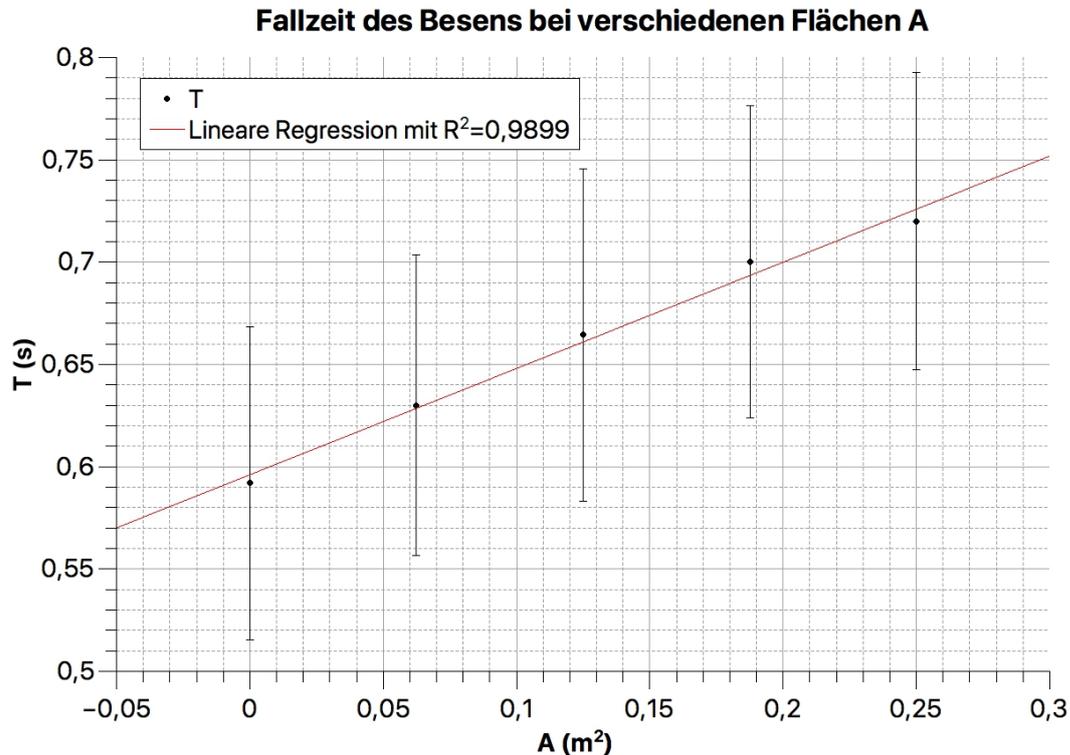


Abb. 4: Messung für den Besenstiel bei Variation der Reibungsfläche



Es lässt sich erkennen, dass die Punkte annähernd einen linearen Zusammenhang zeigen. Die lineare Regression bestätigt diese Beobachtung und liefert eine Genauigkeit von $R^2 = 0,9899$. Somit können wir folgern, dass die Falldauer T proportional zur Reibungsfläche A zunimmt ($T \propto A$). Dies lässt anhand der Formel für die Luftreibung erklären. Diese lautet $F_{LR} = \frac{1}{2} \cdot A c_w \cdot \rho_{Luft} \cdot v^2$. Hier ist sichtbar, dass die Reibungskraft proportional zu A ist. Somit bestätigt das erhaltene Ergebnis die Erwartung.

Im Bezug auf die Besen-Jonglage sollte also ein Besenstiel mit möglichst großer Reibungsfläche (insofern es bei Besenstielen signifikante Unterschiede gibt) gewählt werden.

9 Fazit

Der Versuch ergab, dass die Fallzeit des kippenden Besenstiels abhängig ist von der Stablänge l , der Anfangsauslenkung ϕ_0 und der Lufttreibungsfläche A . Je höher die Stablänge und je geringer die Anfangsauslenkung des Besenstiels, desto größer ist die Fallzeit. Der Einfluss der Luftreibung ergab einen nahezu linearen Einfluss auf die zusätzliche Fallzeit.

Somit ergibt sich als abschließendes Fazit für die Besenjonglage, dass ein möglichst langer Besenstiel mit einer möglichst großen Lufttreibungsfläche gewählt werden sollte, damit das Jonglieren leichter gelingt.



10 Anhang

Tabellen:

$\phi_0 [^\circ]$	$T [s]$	$\langle T \rangle [s]$	σ_T	$u(t)$
2,5	1,12	0,904	0,15261553	0,167903246
2,5	0,737			
2,5	0,804			
2,5	0,869			
2,5	0,99			
5	0,79	0,8268	0,117259115	0,136563904
5	1,024			
5	0,723			
5	0,764			
5	0,833			
7,5	0,796	0,7568	0,046617593	0,084102319
7,5	0,742			
7,5	0,788			
7,5	0,776			
7,5	0,682			
10	0,673	0,725	0,08552485	0,110519229
10	0,728			
10	0,795			
10	0,818			
10	0,611			
12,5	0,679	0,6438	0,099250693	0,12145246
12,5	0,56			
12,5	0,787			
12,5	0,652			
12,5	0,541			
15	0,587	0,572	0,074959989	0,102562176
15	0,523			
15	0,533			
15	0,697			
15	0,52			
17,5	0,47	0,5188	0,038964086	0,080113669
17,5	0,515			
17,5	0,501			
17,5	0,575			
17,5	0,533			
20	0,496	0,4786	0,012798437	0,071160382
20	0,48			
20	0,48			
20	0,46			
20	0,477			
22,5	0,497	0,4634	0,040153456	0,080698823
22,5	0,459			
22,5	0,402			
22,5	0,502			



22,5	0,457			
25	0,456	0,445	0,036796739	0,079082236
25	0,438			
25	0,4			
25	0,5			
25	0,431			
27,5	0,423	0,4408	0,036629223	0,07900443
27,5	0,43			
27,5	0,425			
27,5	0,506			
27,5	0,42			
30	0,376	0,4196	0,048417972	0,085113454
30	0,469			
30	0,474			
30	0,378			
30	0,401			
32,5	0,43	0,4092	0,046879633	0,084247849
32,5	0,411			
32,5	0,33			
32,5	0,422			
32,5	0,453			
35	0,411	0,3614	0,034710229	0,07813322
35	0,323			
35	0,335			
35	0,375			
35	0,363			
37,5	0,285	0,3308	0,060972945	0,092831568
37,5	0,31			
37,5	0,307			
37,5	0,438			
37,5	0,314			
40	0,276	0,3036	0,017896927	0,072251644
40	0,313			
40	0,312			
40	0,296			
40	0,321			
42,5	0,3	0,2678	0,03361101	0,077651143
42,5	0,242			
42,5	0,223			
42,5	0,281			
42,5	0,293			
45	0,293	0,2926	0,006107373	0,070265923
45	0,299			
45	0,285			
45	0,288			
45	0,298			

Tab. 1: Messwerte Besen $L = 106, 1\text{cm}$



$\phi_0 [^\circ]$	$T [s]$	$\langle T \rangle [s]$	σ_T	$u(t)$
2,5	1,143	1,181	0,099571582	0,121714831
2,5	1,125			
2,5	1,067			
2,5	1,27			
2,5	1,3			
5	0,945	0,9608	0,069506834	0,098646845
5	0,917			
5	0,878			
5	1,023			
5	1,041			
7,5	0,906	0,9516	0,075291434	0,102804669
7,5	0,954			
7,5	0,854			
7,5	1,046			
7,5	0,998			
10	0,852	0,89	0,044648628	0,083027104
10	0,858			
10	0,914			
10	0,957			
10	0,869			
12,5	0,778	0,7414	0,045313353	0,08338645
12,5	0,663			
12,5	0,747			
12,5	0,755			
12,5	0,764			
15	0,715	0,7254	0,04272353	0,082007926
15	0,801			
15	0,7			
15	0,71			
15	0,701			
17,5	0,714	0,6924	0,03429723	0,077950625
17,5	0,702			
17,5	0,731			
17,5	0,668			
17,5	0,647			
20	0,649	0,6524	0,01906043	0,072548604
20	0,67			
20	0,638			
20	0,674			
20	0,631			
22,5	0,619	0,6034	0,028342548	0,075520196
22,5	0,61			
22,5	0,592			
22,5	0,561			
22,5	0,635			
25	0,558	0,6078	0,049796586	0,08590518
25	0,6			



25	0,571			
25	0,683			
25	0,627			
27,5	0,543	0,564	0,026711421	0,074923294
27,5	0,61			
27,5	0,548			
27,5	0,56			
27,5	0,559			
30	0,554	0,5716	0,014656057	0,07151783
30	0,572			
30	0,592			
30	0,562			
30	0,578			
32,5	0,507	0,5202	0,046467193	0,084019045
32,5	0,592			
32,5	0,538			
32,5	0,476			
32,5	0,488			
35	0,453	0,459	0,043145104	0,082228341
35	0,472			
35	0,525			
35	0,433			
35	0,412			
37,5	0,438	0,4694	0,038958953	0,080111173
37,5	0,418			
37,5	0,507			
37,5	0,494			
37,5	0,49			
40	0,515	0,4518	0,036382688	0,07889043
40	0,451			
40	0,432			
40	0,431			
40	0,43			
42,5	0,322	0,326	0,00717635	0,070366896
42,5	0,327			
42,5	0,32			
42,5	0,338			
42,5	0,323			
45	0,294	0,339	0,027793884	0,075316001
45	0,347			
45	0,365			
45	0,333			
45	0,356			

Tab. 2: Messwerte Besen $L = 140,3\text{cm}$



$A[m^2]$	$T[s]$	$\langle T \rangle [s]$	σ_T	$u(t)$
0	0,597	0,592	0,030757113	0,076459139
	0,565			
	0,611			
	0,63			
	0,557			
0,0625	0,625	0,63	0,022847319	0,073634231
	0,648			
	0,655			
	0,597			
0,125	0,625	0,6644	0,041343682	0,081297601
	0,618			
	0,627			
	0,717			
	0,684			
0,1875	0,676	0,7002	0,030384206	0,076309895
	0,719			
	0,727			
	0,653			
	0,687			
0,25	0,715	0,72	0,019506409	0,072667049
	0,716			
	0,691			
	0,726			
	0,745			
	0,722			

Tab. 3: Messwerte zur Fallzeit des Besenstiels bei Variation der Reibungsfläche

Material:

Scholz, R. (2020). Der kippende Besenstiel. Leibniz Universität Hannover.