

Angaben zum Experiment	
Name: _____	Stempel/ Tutor-Unterschrift / Punkte
Gruppennummer: _____	
Versuchsleiter: _____	
Datum des Versuchs: _____	
Datum der Abgabe: _____	

Allgemeines	Ja	Nein	n.a.
• Abgabe des Berichts erfolgte pünktlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Äußere Form des Berichts ist angemessen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messdaten liegen dem Bericht bei	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Jede gedruckte Seite enthält Namen und Gruppennummer	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Es war keine Nachbesserung erforderlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Strukturierung und Dokumentation	Ja	Nein	n.a.
• Der Bericht ist für sich stehend verständlich	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Rechenwege zur Ermittlung des Ergebnisses sind nachvollziehbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Unsicherheiten wurden richtig ermittelt (Fehlerfortpflanzung)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Alle quantitativen Ergebnisse enthalten Angaben zur Messunsicherheit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten und Ergebnisse werden diskutiert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Graphische Darstellung	Ja	Nein	n.a.
• Bildunterschriften sind aussagekräftig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Achsen sind vollständig bezeichnet und sinnvoll skaliert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Messunsicherheiten sind mit Fehlerbalken dargestellt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei Fit-Analysen sind alle relevanten Parameter angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
• Bei übernommenen Bildern ist die Quelle angegeben	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Anmerkungen

HomeLab - Der kippende Besenstiel

Tim Schrader, Florian Tonn

8. Januar 2021



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Physikalische Überlegungen	4
3	Die Kippzeit	5
4	Messungen	5



1 Einleitung

In diesem ersten "Home-Lab"-Versuch dieses Semesters werden wir uns mit der Physik von einem kippendem Stab beschäftigen. Wir lassen einen Besenstiel gemäß Abb. 1 von einem festen Angelpunkt zu Boden kippen. Dieser Versuch ist für Pandemiezeiten gut geeignet, da man ihn zuhause durchführen kann. Hierbei ist eine genau Messung nicht leicht zu realisieren und Bestandteil des Experimentierens. Unsere Aufgaben bestehen dabei unter Anderem daraus, Stäbe verschiedener Länge mit unterschiedlichen anfänglichen Auslenkungen fallen zu lassen und alle relevanten Parameter (insbesondere die Fallzeit) zu messen, die dem ganzen zugrunde liegenden physikalischen Überlegungen auszuführen und die Bewegungsgleichung mit numerischen Methoden zu lösen.

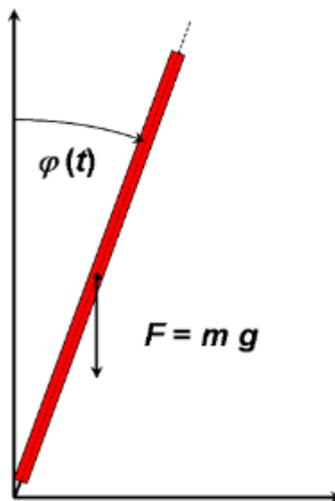


Abb. 1: Kippbewegung eines starren Stabes

2 Physikalische Überlegungen

Im ersten Abschnitt des Berichts, wollen wir uns mit der Physik dieser Kippbewegung befassen. Die experimentale Auseinandersetzung folgt dann in den weiteren Kapiteln oder ist im Wiki notiert.

Der Stab ("Besenstiel") stellt in unseren Versuchen effektiv einen starren Körper dar, das heißt, dass der Stab nicht verformbar ist. In unserem Fall ist die einzig wirkende Kraft die Gewichtskraft. Diese führt zu einem Drehmoment \mathbf{M} , also zu einer Rotationsbewegung um den Aufstellpunkt (dies ist das Umfallen). Es gilt für das Drehmoment $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$, der \mathbf{r} -Vektor zeigt hierbei vom Aufstellpunkt zum Schwerpunkt des Stabes. Wir können also auch anhand dieser Gleichung den Spezialfall erkennen, dass falls der Stab exakt gerade steht nicht umfällt, weil das Drehmoment verschwindet (da $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$) und somit keine Drehbewegung induziert wird, es kommt also nicht zum Umkippen. Dies ist jedoch eine labile Position, die geringste Auslenkung aus dieser Lage führt zu einem Drehmoment und dadurch dann zur Kippbewegung.

Für die Winkelbeschleunigung gilt $\ddot{\varphi} = \frac{\mathbf{M}}{I}$, wobei I das Trägheitsmoment für die Rotation um Rotationsachse ist. Für einen dünnen Stab, der um eine Querachse durch ein Ende rotiert gilt:



$I = \frac{1}{3} m l^2$ (dies beinhaltet die Annahme, von einer homogenen Massenverteilung!). So kann man schlussfolgern, dass die Masse keinen Einfluss auf die Stabbewegung hat, da

$$\ddot{\varphi} = \frac{3 m g \mathbf{r} \times -\mathbf{e}_z}{m l^2}$$

Mittels $\mathbf{r} = \frac{1}{2} l \sin \varphi$ ergibt sich insgesamt, dass die Masse m keinen Einfluss auf die Kippbewegung hat und die Winkelbeschleunigung proportional zu $\frac{1}{l}$ ist, ein längerer Stab sorgt also für größere Fallzeiten.

Als Erkenntnis für unsere alltägliche Besenjonglage gewinnen wir, dass wir einen möglichst langen Stab nehmen wollen, das größere Trägheitsmoment von einem längeren Stab sorgt für kleinere Winkelbeschleunigungen, sodass wir falls der Besenstiel in eine Schiefelage gerät mehr Zeit haben darauf zu reagieren und Ausgleichsbewegungen durchzuführen.



3 Die Kippzeit

In diesem Versuchsteil haben wir mit der Kippzeit des Besenstiels befasst. Die Kippzeit verringert sich rechnerisch mit größer werdenden Anfangswinkel und mit kürzerer Stablänge.

Wenn man das Drehmoment und Trägheitsmoment berechnet erhält man:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sin(\varphi)}{\tau^2}$$

mit

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich nicht so einfach analytisch lösen, weshalb wir ein numerisches Verfahren mit einem Tabellenverarbeitungsprogramm durchführen. Dieses ist im Detail im ap-Wiki erläutert. Im folgenden Bericht wird sich nur auf die Ergebnisse dieses Verfahrens bezogen.



4 Messungen

Bei unseren Messungen wurden zwei verschiedene Stablängen verwendet. Für verschiedene Startwinkel wurde die benötigte Fallzeit bestimmt. Der jeweilige Versuchsaufbau ist im Wiki beschrieben, dort sind auch die gemessenen Werte und weitere relevante Daten zu finden. Der Startwinkel φ_0 und insbesondere die Fallzeit T sind nicht ganz einfach zu messen. Deshalb werden wir uns hier intensiver mit den Messunsicherheiten beschäftigen und Vergleiche zu den Ergebnissen der numerischen Lösung ziehen.



Für den Stab mit Länge $l = (139,50 \pm 0,05) \text{cm}$ ergab sich in den Messungen für vier verschiedene Startwinkel gemäß Versuchsaufbau (Tim):

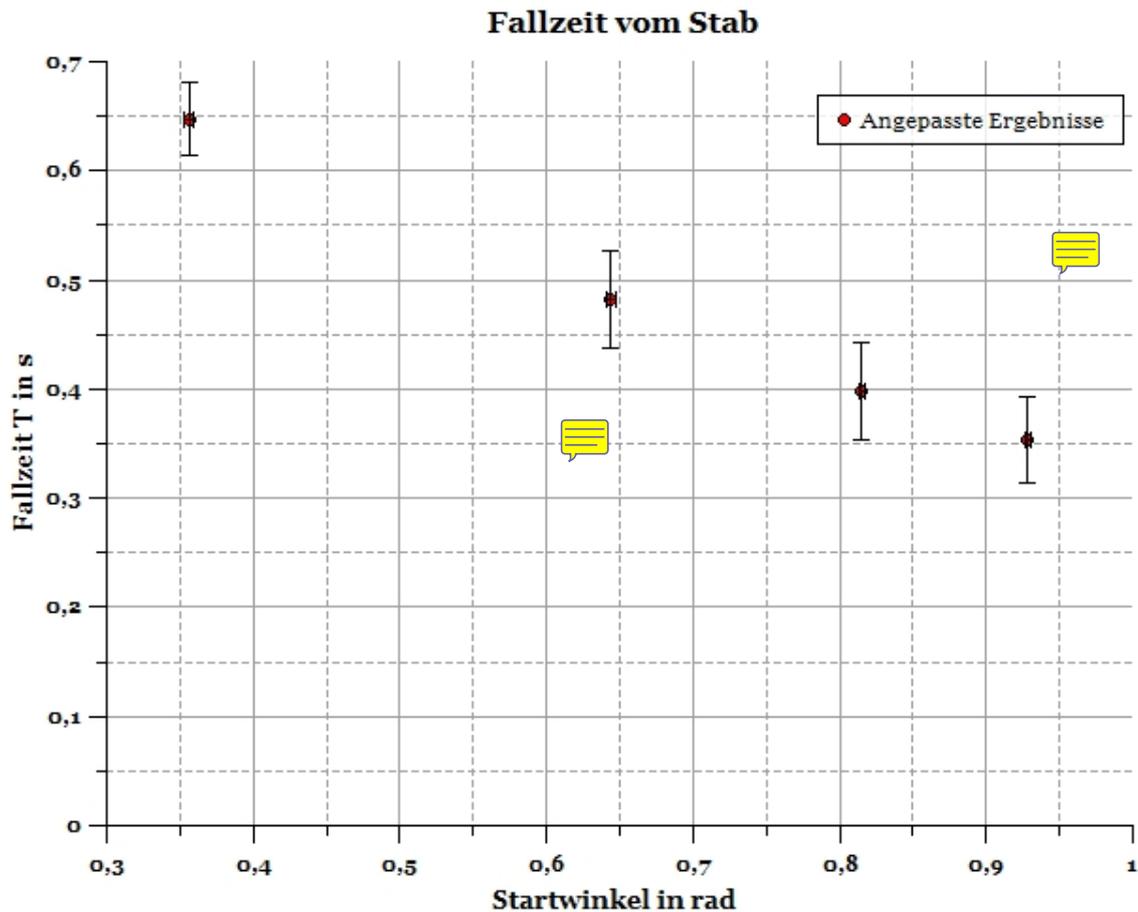


Abb. 2: Dargestellt ist die Fallzeit des Stabes in Abhängigkeit vom Startwinkel

Aus den Daten kann man erkennen, dass die Fallzeit mit zunehmendem Winkel kleiner wird, ferner ist auch erkennbar, dass dieser Zusammenhang nicht linear ist. In der Grafik sind die y-Fehlerbalken nicht der rein rechnerisch bestimmte Standardfehler. Wie aus den Daten im wiki erkenntlich, liegt dieser nur jeweils bei etwa $0,01\text{ s}$. Die hier bestimmten y-Fehlerbalken sind die maximale Abweichung von einem Messwert zum Mittelwert. Das bedeutet alle Messwerte liegen innerhalb der Balkengrenzen, beziehungsweise nur ein einziger liegt auf der Grenze selbst. Dies ist also gewissermaßen eine maximale Fehlerabschätzung. Dies ist darin begründet, dass man so trotz schwierig zu bestimmender Größen und einigen eventuell übersehenen Störfaktoren man ein Intervall erhält, in welchem der wahre Wert liegen sollte. Die Werte sind schon dahingehend angepasst, dass die Endlichkeit der Schallgeschwindigkeit berücksichtigt wurde. Dies geschah darüber, dass zu den Mittelwerten der ermittelten Werte ein fester Zuschlag addiert wurde ($0,00235\text{ s}$), welcher die Laufzeit des Schalls berücksichtigen soll. Dies war notwendig da die Messung über akustische Signale erfolgte. Der Wert berechnete sich aus der angenommenen Schallgeschwindigkeit für typische Temperatur- und Feuchteverhältnisse von $340\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und einer Entfernung von etwa $0,8\text{ m}$ (Laufzeitfehler ja bei Beginn und Ende, Abschätzung der Distanzen und daraus die Differenz ergibt die $0,8\text{ m}$).

Im Folgenden sollen die so bestimmten Werte noch einmal mit den Lösung der numerischen Simulation verglichen werden. Für die gleichen Startwinkel und die gleiche Stablänge wurde das Verfahren solange iteriert, bis mindestens die dritte Nachkommastelle der so berechneten Fallzeit konvergierte, die Größenordnung der Zeitschritte lag bei 10^{-4} .

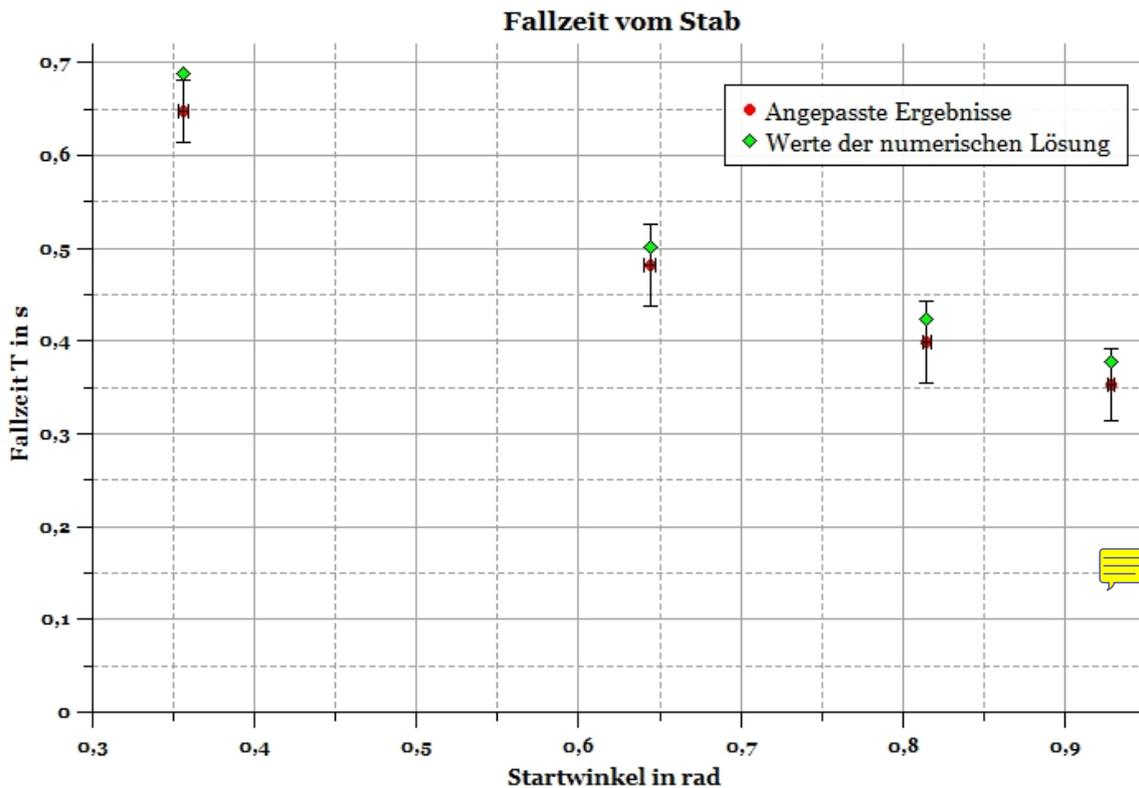


Abb. 3: Bestimme Messwerte inklusive der numerischen Lösung

Wir können erkennen, dass trotz maximaler Fehlerabschätzung beim kleinsten Startwinkel φ_0 der numerisch bestimmte Wert nicht innerhalb der Toleranzgrenzen liegt. Bei den anderen drei Startwinkeln ist dies nicht der Fall. Jedoch ist es druchgehend der Fall, dass der numerische Wert etwas über dem gemessenen und vermeintlich korrigiertem Wert liegt. Dies lässt auf einen nicht berücksichtigten systematischen Fehler schließen. Eine Abweichung ist definitiv, dass der benutzte Stab nicht genau ein homogener, zylinderförmiger Stab ist, wie im Foto auf dem Wiki erkenntlich, ist er an der Spitze etwas schmaler, als am Rest des Stabes. Diese Annahme steckt jedoch in der Bewegungsgleichung auf der das Verfahren beruht. Ob die Abweichung sich allein dadurch erklären lässt, ist jedoch nicht gesichert.

Die zweite Messung erfolgte mit einem Stab von 1,5 m Länge. Die Fehler-Abschätzung ist hierbei die Standardabweichung der gemessenen Daten vom Mittelwert. Es wurden für jeden Startwinkel fünf Messungen vollzogen, was im Wiki dokumentiert ist. Der Winkel konnte aufgrund des Schnürsenkellots nicht sehr genau bestimmt werden, was bei $\varphi = \arccos\left(\frac{x}{1,5}\right)$ zu großer Ungenauigkeit bei großen Winkeln führte, da zwar die Ungenauigkeit der Länge x gleich bleibt, jedoch bei dem Winkel einen großen Unterschied machen kann.

In Abbildung 4 sieht man, dass die Standardabweichung der Messwerte nicht ausreicht, um die Werte der numerischen Methode einzuschließen.

Allgemein lässt sich zum Vergleich sagen, dass die Werte der numerischen Methode alle über den Messwerten liegen, die wir gemessen hatten. Was komisch erscheint, da die numerische Methode Luftreibung und die Reibung am Standpunkt des Besens vernachlässigt, sodass man eine schnellere Fallzeit erwartet hätte. Trotzdem lassen die Diagramme vermuten, dass unsere Messung geglückt ist, da der Verlauf der gedachten Kurven sehr ähnlich ist.



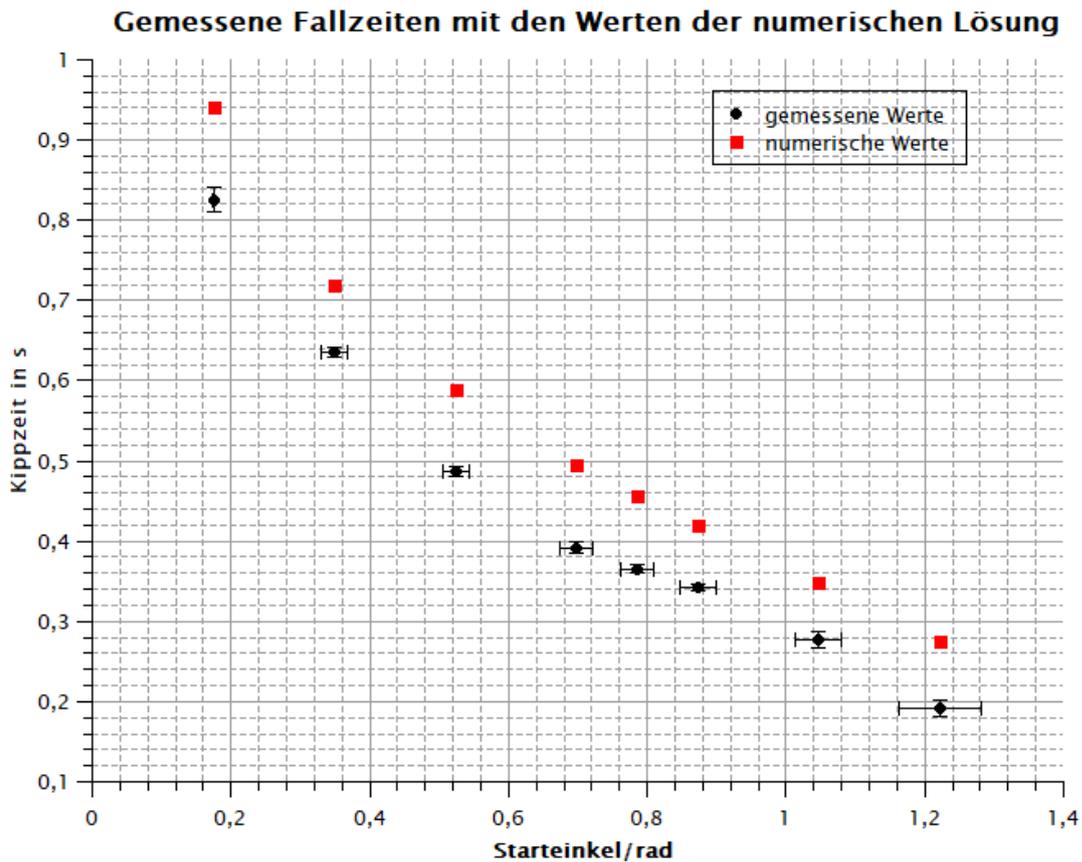


Abb. 4: Bestimme Messwerte

Diese Messung wurde zudem nochmal mit einem Pappschild am Besenstiel durchgeführt, um den Einfluss der Luftreibung zu überprüfen (s. Bilder im Wiki). Hier wurde die Messung mittels einer normalen Stoppuhr von Hand getätigt, wodurch sich eine andere Unsicherheit ergibt.

Diese Messdaten sind in Abbildung 5 dargestellt, man sieht, wie zu erwarten war, dass der Besen langsamer zu Boden fällt als ohne erhöhte Luftreibung durch ein Pappschild. Die Messung der Winkel erfolgte wieder über die Kreppbahn am Boden. Diese verlängerte Fallzeit ist natürlich maßgeblich auf die viel größere Querschnittsfläche zurückzuführen, wodurch der Impulsübertrag der Luftmoleküle auf den Stab wesentlich größer ist, was die Bewegung verlangsamt. Geringfügig verändert sich jedoch auch das Trägheitsmoment, des Konstruktes Stab+Pappschild im Vergleich zu nur Stab, sodass die Fallzeiten auch im Vakuum sich leicht unterscheiden würden.

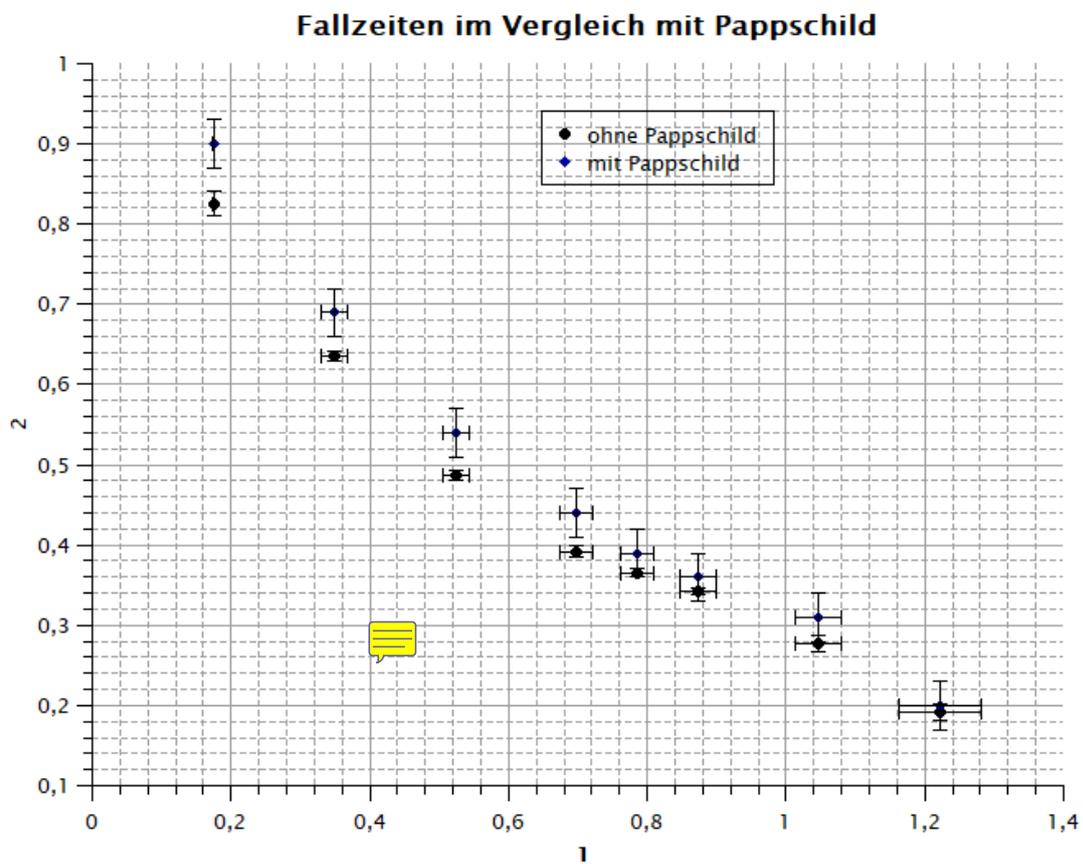


Abb. 5: Bestimme Messwerte