Aufgaben zum Torsionsversuch

Tobias Otte, Nele-Marie Knoop

22. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Berechnung der Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit ist definiert über:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Mit Frequenz f. Nun gilt für f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Mit T als Periodendauer. Setzt man das ein folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

stellt man das nach T um:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Damit lässt sich aus der Winkelgeschwindigkeit die Periodendauer T berechnen.

2 Aufgabe 1

Die zu löesende DGL:

$$I \cdot \frac{d^2}{dt^2}\phi = -D_r \cdot \phi$$

Umstellen nach $\frac{d^2}{dt^2}\phi$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi = -\frac{D_r}{I} \cdot \phi$$

Dabei handelt es sich um den harmonischen Osszilator, welcher einer allgemeinen Lösung folgender Art folgt:

$$\phi = A \cdot sin(\omega \cdot t) + B \cot cos(\omega \cdot t)$$

Vergleicht man dies nun mit der Formel aus der Aufgabe:

$$\phi = \phi_0 \cot cos(\omega \cdot t)$$

Sieht man, dass B der Startauslenkung ϕ_0 entspricht und A die Startgeschwindigkeit ist, welche bei Null liegt.

3 Aufgabe 2

Sämtliche Drehmomente, also D und D_r, werden in Newtonmweter gemessen. Bei ϕ handelt es sich um einen Winkel in Grad und das Trägheitsmoment I wird in $kg \cdot m^2$

4 Aufgabe 3

wird die Formel für ϕ in die Dgl eingesetzt, folgt:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_0 \cot cos(\omega \cdot t)) = -\frac{D_r}{I} \cdot \phi_0 \cot cos(\omega \cdot t)$$

Führt man dann die Ableitung aus:

$$-\omega^2 \cdot (\phi_0 \cot cos(\omega \cdot t)) = -\frac{D_r}{I} \cdot \phi_0 \cot cos(\omega \cdot t)$$

Nun lässt sich einiges wegkürzen:

$$-\omega^2 = -\frac{D_r}{I}$$

umgestellt nach ω

$$\omega = \sqrt{\frac{D_r}{I}}$$

Dies entspricht gerade der Winkelgeschwindigkeit der Aufgabe.

5 Aufgabe 4

Wenn man den Torsionsaufbau verwendet, kann man den Aufbau auslenken und dann bei der Schwingung die Periodendauer messen. Wenn man dann die Formel aus Aufgabe 0 verwendet:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

kann damit die Winkelgeschwindigkeit Omega bestimmt werden. Wenn man nun das Trägheitsmoment I des Aufbaus berechnet kann man die Formel für die Winkelgeschwindigkeit nach dem Drehmoment D_r umstellen und berechnen. Mit dem Winkel der Auslenkung lässt sich dann mit Formel (1) aus der Theorie das Drehmoment bestimmen.

6 Aufgabe 5

Für die potentielle Energie E_{pot} des Systems gilt in diesem Falle:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D_r \cdot \phi^2$$

Die kinetische Energie E_{kin} hingegen ist definiert über:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\frac{d}{dt}\phi)^2$$

Und dadurch folgt für die Gesamtenergie E_{Ges}:

$$E_{Ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D_r \cdot \phi^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\frac{d}{dt}\phi)^2$$

Setzt man nun die Formeln für ϕ in die Gleichung ein, folgt daraus:

$$E_{Ges} = \frac{1}{2} \cdot D_r \cdot (\phi_0 \cdot cos(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\frac{d}{dt}(\phi_0 \cdot cos(\omega \cdot t)))^2$$

Durch ausführen der Ableitung folgt dann:

$$E_{Ges} = \frac{1}{2} \cdot D_r \cdot (\phi_0 \cdot cos(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \cdot (\phi_0 \cdot sin(\omega \cdot t))^2$$

Nun ist $I \cdot \omega^2 = D_r$ nach Aufgabe 3 woraus folgt:

$$E_{Ges} = \frac{1}{2} \cdot D_r(\cdot(\phi_0 \cdot cos(\omega \cdot t))^2 + (\phi_0 \cdot sin(\omega \cdot t))^2)$$

Da $(k \cdot cos(\omega \cdot t))^2 + (k \cdot sin(\omega \cdot t))^2) = k$ gilt, folgt zuletzt:

$$E_{Ges} = \frac{1}{2} \cdot D_r \cdot \phi_0$$

Dieser Ausdruck ist zeitlich Konstant und erfüllt deswegen die Energieerhaltung und die Grundlage der Definition ist gezeigt.

7 Aufgabe 6

Der Steinersche Satz besagt, dass sich bei parallel liegende Drehaschen die Trägheitsmomente wie folgt berechnen lassen:

$$J_2 = J1 \cdot md^2$$

Wobei J_2 das parallele Trägheitsmoment, J_1 das Trägheitsmoment bei der Dreachse durch den Mittelpunkt, m ist die Masse des Objekts und d die Distanz zwischen den beiden Drehachsen.